

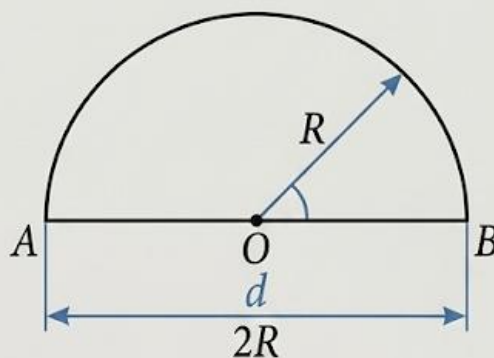
PITAGORASZ-TÉTEL, THÁLESZ-TÉTEL – GYAKORLÁS 2

- 14.** Szerkessz derékszögű háromszöget, ha adott a köré írható kör sugara és az egyik hegyesszöge!

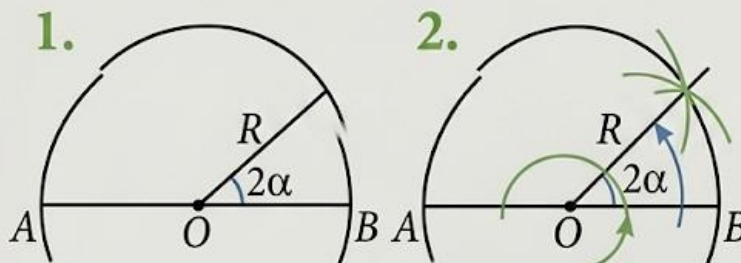
Megoldás:

Szerkesztés lépései:

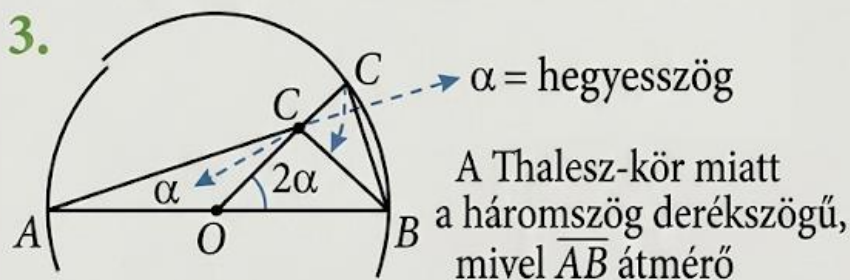
1. Lépés: Szerkesszünk egy $d=2R$ átmérőt ($\overline{AB}$ szakaszt)



2. Lépés: Szerkesszük meg a 2α középponti szöget az egyik végponthoz (pl. O -ból)



3. Lépés: Az átmérő és a szögmetszet adja a C pontot. ABC a kész derékszögű háromszög



15  Egy háromszög szögei 68° és 76° . Megrajzoljuk a beírható körét, s azt a három pontot, ahol az oldalak érintik a beírható kört. A három érintési pont alkot egy háromszöget. Mekkora ennek a háromszögnek a szögei?

Megoldás:

1. A harmadik belső szög meghatározása:

Jelöljük az eredeti háromszög szögeit α , β és γ betűkkel. Tudjuk, hogy a belső szögek összege 180° .

$$\alpha = 68^\circ$$

$$\beta = 76^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - (68^\circ + 76^\circ) = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ$$

2. Az érintési pontok által alkotott háromszög szögei:

Legyenek az érintési pontok által alkotott háromszög szögei α' , β' és γ' .

Az érintési pontokhoz húzott sugarak merőlegesek az oldalakra, így a kör középpontjánál keletkező középponti szögek és a háromszög szögei között összefüggés van. A kerületi és középponti szögek tétele alapján az új háromszög szögei a következő képletekkel számolhatóak ki:

$$\alpha' = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

$$\beta' = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$$

$$\gamma' = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$$

3. A konkrét értékek kiszámítása:

$$\alpha' = 90^\circ - \frac{68^\circ}{2} = 90^\circ - 34^\circ = 56^\circ$$

$$\beta' = 90^\circ - \frac{76^\circ}{2} = 90^\circ - 38^\circ = 52^\circ$$

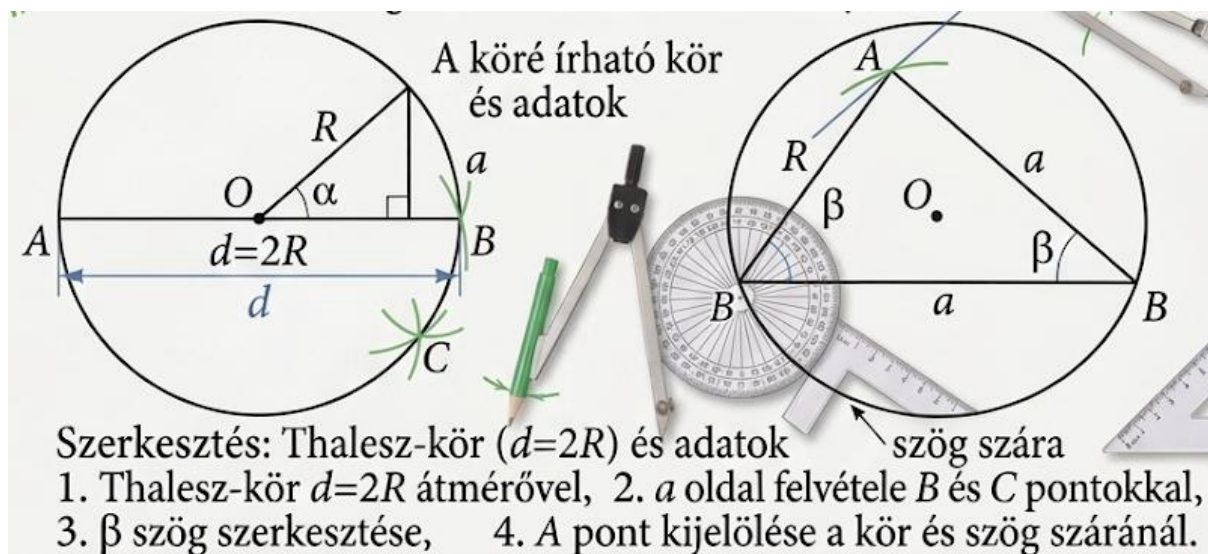
$$\gamma' = 90^\circ - \frac{36^\circ}{2} = 90^\circ - 18^\circ = 72^\circ$$

Az érintési pontok által alkotott háromszög szögei:

$$56^\circ, 52^\circ \text{ és } 72^\circ$$

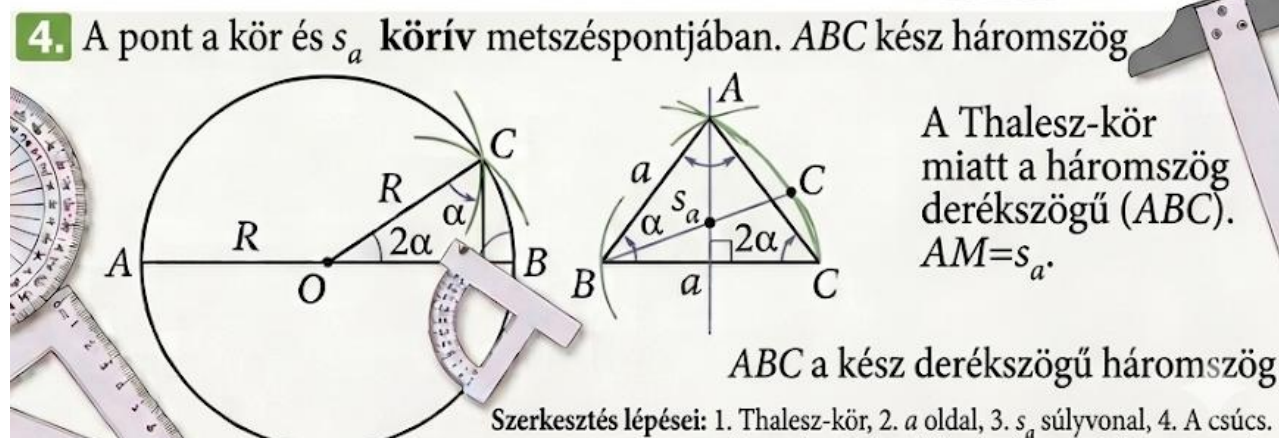
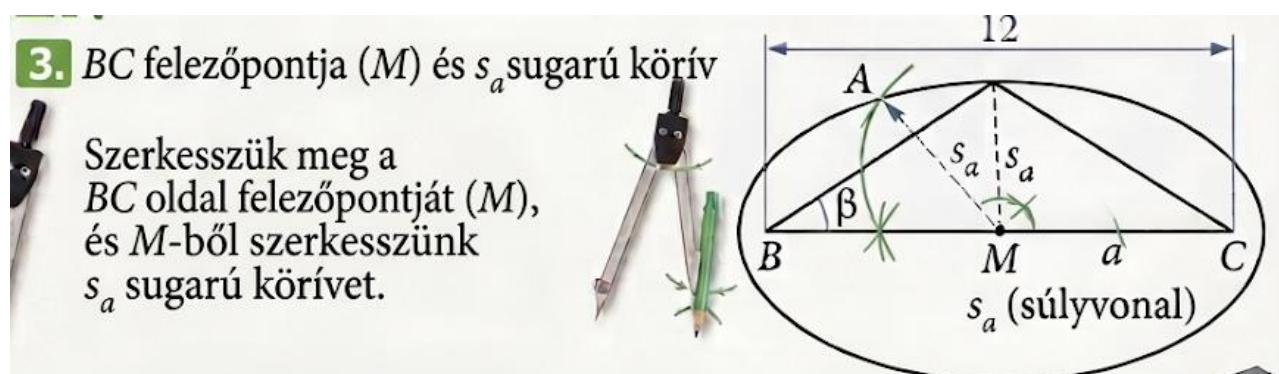
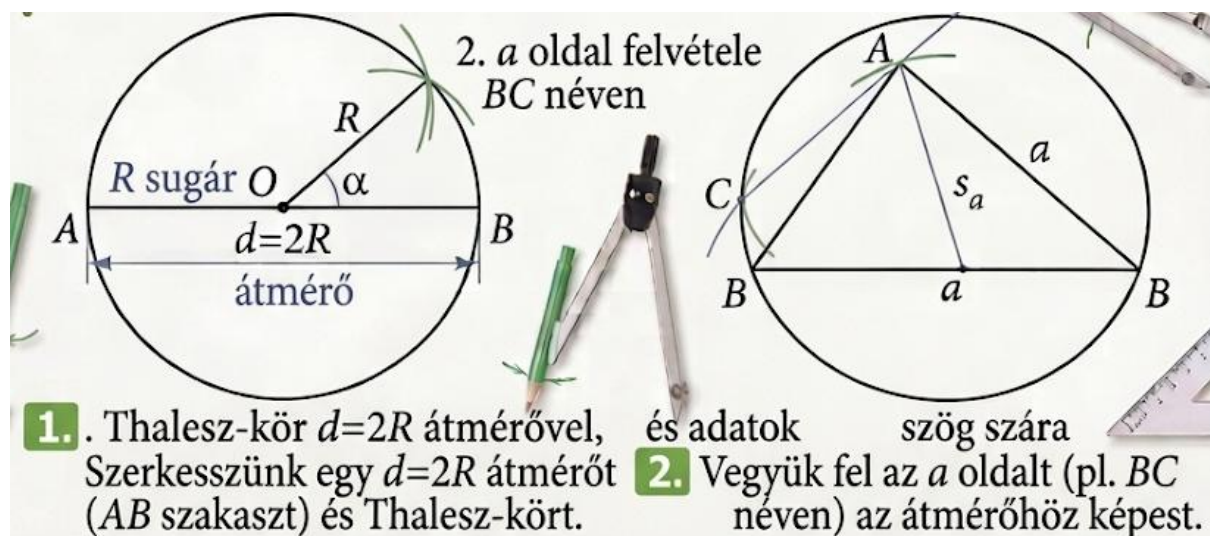
16 Szerkessz háromszöget, ha adott a köré írható kör sugara, egyik oldala és az oldalon lévő egyik szög!

Megoldás:



17 Szerkessz háromszöget, ha adott a köré írható kör sugara, egyik oldala és az oldalhoz tartozó súlyvonala!

Megoldás:



18 Szerkessz egyenlő szárú háromszöget, ha adott a köré írható kör sugara és az alapja!

Megoldás:

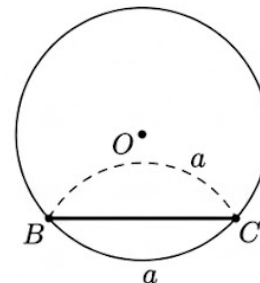
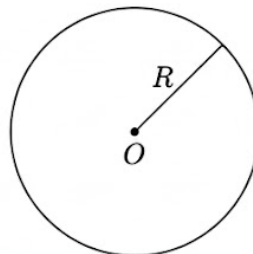
- A kiindulási adatok: A köré írható kör sugara (R) és az alap hossza (a).

- **1. lépés:** A köré írható kör szerkesztése.

Vegyünk fel egy tetszőleges O pontot a síkon.

O pontból szerkesszünk egy R sugarú kört.

Ez a kör lesz a háromszög köré írható kört.



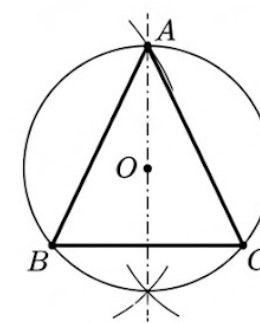
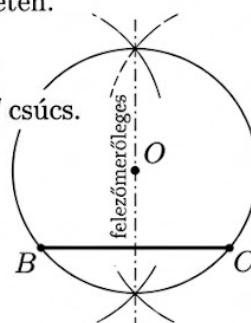
- **2. lépés:** Az alap (BC oldal) felvétele.

Vegyünk fel egy tetszőleges B pontot a kör kerületén.

A B pontból szerkesszünk egy a sugarú körívet.

A kapott metszéspont a kör kerületével lesz a C csúcs.

A kapott BC szakasz lesz a háromszög alapja.



- **3. lépés:** Az alap felezőmerőlegese.

Szerkesszük meg a BC alap felezőmerőlegesét.

Mivel egyenlő szárú háromszögről van szó, a harmadik csúcsnak ezen az egyenesen kell lennie.

- **4. lépés:** A harmadik csúcs (A) meghatározása.

A felezőmerőleges egyenese és a kör kerülete megadja a harmadik A csúcsot.

Két metszéspontot kapunk, ezek közül tetszőlegesen választhatjuk az egyiket. Jelöljük A -val.

- **Végeredmény:** Az ABC egyenlő szárú háromszög kész.

- 19**  Egy háromszöget a középvonalaival négy háromszögre bontunk. Ezek kerületeinek összege 32 cm. Mekkora az eredeti háromszög kerülete?

Megoldás:

Elméleti háttér:

1. A háromszög középvonala párhuzamos a harmadik oldallal, és hossza annak fele.
2. A középvonalak az eredeti háromszöget négy olyan kisebb háromszögre bontják, amelyek oldalai feleakkorák, mint az eredeti háromszög megfelelő oldalai.
3. Ebből kifolyólag a kis háromszögek mindegyike hasonló az eredeti háromszöghöz, és kerületük is az eredeti kerület fele.

Jelöljük az eredeti háromszög oldalait a , b , és c betűkkel, kerületét pedig K -val:

$$K = a + b + c$$

A középvonalak által alkotott négy kis háromszög mindegyikének oldalai: $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, és $\frac{c}{2}$.

Egy kis háromszög kerülete (k):

$$k = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} = \frac{a + b + c}{2} = \frac{K}{2}$$

A feladat szerint a négy kis háromszög kerületeinek összege 32 cm:

$$4 \cdot k = 32$$

$$4 \cdot \frac{K}{2} = 32$$

$$2 \cdot K = 32$$

Ebből az eredeti háromszög kerülete:

$$K = \frac{32}{2} = 16 \text{ cm}$$

20  Egy derékszögű háromszög egyik befogója 7 cm. Milyen távol van az átfogó felezőpontja a másik befogótól?

Megoldás:

Elméleti háttér:

1. A derékszögű háromszögben a két befogó merőleges egymásra.
2. Egy pont távolsága egy egyenestől a pontból az egyenesre bocsátott merőleges szakasz hossza.
3. A háromszög középvonala összeköti két oldal felezőpontját, párhuzamos a harmadik oldallal, és hossza annak fele.

Jelöljük a háromszög csúcsait A , B , és C betűkkel úgy, hogy a derékszög a C csúcsnál legyen.

Legyen a megadott befogó: $BC = 7$ cm.

Legyen a másik befogó AC , az átfogó pedig AB .

Jelöljük az átfogó felezőpontját F -fel. A feladat az F pont távolságát kérdezi az AC befogótól.

Húzzunk merőlegest F -ből az AC befogóra, és jelöljük a talppontot P -vel. Az FP szakasz hossza a keresett távolság.

Mivel $FP \perp AC$ és $BC \perp AC$, ezért $FP \parallel BC$.

Mivel F az AB átfogó felezőpontja és $FP \parallel$

BC , ezért az FP szakasz a háromszög egyik középvonala.

A középvonal tulajdonsága alapján:

$$FP = \frac{BC}{2}$$

Behelyettesítve a megadott értéket:

$$FP = \frac{7 \text{ cm}}{2} = 3,5 \text{ cm}$$

Az átfogó felezőpontja a másik befogótól

3,5 cm

távolságra van.

21. Egy derékszögű háromszög befogói 45 mm és 28 mm hosszúak. Milyen messze van a súlypontja a derékszögű csúcstól?

Megoldás:

Elméleti háttér:

1. A súlypont (S) a súlyvonalak metszéspontja. A súlypont a súlyvonalat 2 : 1 arányban osztja ketté,
a csúcstól távolabbi rész a hosszabb.
2. Derékszögű háromszögben a derékszögű csúcsból induló súlyvonal (s_c) hossza pontosan fele az átfogó (c) hosszának: $s_c = \frac{c}{2}$.
3. A keresett távolság a súlyvonal csúcstól mért $\frac{2}{3}$ -ad része: $d = \frac{2}{3}s_c$.

1. Az átfogó (c) kiszámítása Pitagorasz-tétellel:

A befogók: $a = 45$ mm, $b = 28$ mm.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{45^2 + 28^2} = \sqrt{2025 + 784} = \sqrt{2809}$$

$$c = 53 \text{ mm}$$

2. A derékszögű csúcsból induló súlyvonal (s_c) hossza:

$$s_c = \frac{c}{2} = \frac{53}{2} = 26,5 \text{ mm}$$

3. A súlypont távolsága (d) a csúcstól:

A súlypont a súlyvonalnak a csúcstól számított $\frac{2}{3}$ részénél található.

$$d = \frac{2}{3} \cdot s_c$$

$$d = \frac{2}{3} \cdot 26,5 = \frac{53}{3} \approx 17,67 \text{ mm}$$

A súlypont távolsága a derékszögű csúcstól:

$$\frac{53}{3} \text{ mm} \approx 17,67 \text{ mm}$$

22  Egy derékszögű háromszög egyik befogója 39 mm, átfogója 89 mm. A súlypontját összekötjük a csúcsaival, így három darab háromszögre bontjuk. Mennyi a keletkező háromszögek kerülete?

Megoldás:

Elméleti háttér:

1. Pitagorasz-tétel: A hiányzó befogó meghatározásához.
2. Súlypont (S) tulajdonsága: A súlypont a súlyvonalakat 2 : 1 arányban osztja a csúcstól távolodva.
3. Súlyvonalak hossza: A csúcsok és a súlypont távolsága a megfelelő súlyvonalak $\frac{2}{3}$ része.
4. Derékszögű háromszög speciális súlyvonala: A derékszögű csúcsból induló súlyvonal hossza az átfogó fele.

1. A hiányzó befogó (b) kiszámítása:

Adott: $a = 39$ mm, $c = 89$ mm.

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{89^2 - 39^2} = \sqrt{7921 - 1521} = \sqrt{6400} = 80 \text{ mm}$$

2. A súlyvonalak (s_a, s_b, s_c) hosszának meghatározása:

- s_c (a derékszögű csúcsból): $s_c = \frac{c}{2} = \frac{89}{2} = 44,5$ mm

- s_a (az a oldalt felezi): $s_a = \sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{80^2 + 19,5^2} = \sqrt{6400 + 380,25} \approx 82,34$ mm

- s_b (a b oldalt felezi): $s_b = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{39^2 + 40^2} = \sqrt{1521 + 1600} = \sqrt{3121} \approx 55,87$ mm

3. A csúcsok távolsága a súlyponttól (AS, BS, CS):

$$AS = \frac{2}{3}s_a \approx 54,89 \text{ mm}$$

$$BS = \frac{2}{3}s_b \approx 37,25 \text{ mm}$$

$$CS = \frac{2}{3}s_c = \frac{2}{3} \cdot 44,5 \approx 29,67 \text{ mm}$$

4. A három kis háromszög kerülete (K_1, K_2, K_3):

- 1. háromszög (oldalai: a, BS, CS): $K_1 = 39 + 37,25 + 29,67 = 105,92$ mm

- 2. háromszög (oldalai: b, AS, CS): $K_2 = 80 + 54,89 + 29,67 = 164,56$ mm

- 3. háromszög (oldalai: c, AS, BS): $K_3 = 89 + 54,89 + 37,25 = 181,14$ mm

A keletkező háromszögek kerületei:

105,92 mm; 164,56 mm; 181,14 mm

- 24** 📡 Egy derékszögű háromszög befogói 20 mm és 21 mm.
Milyen messze van a befogók felezőpontjától a derékszögű csúcsból húzott magasság talppontja?

Megoldás:

Thalész-tétel: Minden derékszögű háromszög köré írható körének középpontja az átfogó felezőpontja.
Megfordítva: Ha egy körátmérő két végpontját összekötjük a körvonal bármely más pontjával, derékszögű háromszöget kapunk.

1. Az átfogó (c) kiszámítása Pitagorasz-tétellel:

Az ABC derékszögű háromszögben:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{20^2 + 21^2} = \sqrt{400 + 441} = \sqrt{841} = 29 \text{ mm}$$

2. A magasságtalppont (T) és a befogók kapcsolata:

A derékszögű csúcsból (C) bocsátott magasság (m) merőleges az átfogóra.

Ezért az eredeti háromszög két kisebb derékszögű háromszögre bomlik: $\triangle BTC$ és $\triangle ATC$.

Mindkét kis háromszögben a derékszög a T pontnál van.

3. A távolság meghatározása Thalész-tétellel:

A Thalész-tétel megfordítása kimondja, hogy egy derékszögű háromszög köré írható körének középpontja az átfogó felezőpontja, sugara pedig az átfogó fele.

- Nézzük a $\triangle BTC$ derékszögű háromszöget!

Ennek átfogója a $BC = a = 20$ mm hosszúságú befogó.

Mivel $\angle BTC = 90^\circ$, a T pont rajta van a BC szakasz fölé írt Thalész-körön.

Ennek a körnek a középpontja az a befogó felezőpontja (F_a), sugara pedig $\frac{a}{2} = 10$ mm.

Ebből következik, hogy a T pont távolsága F_a -tól pontosan a sugár:

$$F_a T = \frac{a}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ mm}$$

- Nézzük a $\triangle ATC$ derékszögű háromszöget!

Ennek átfogója az $AC = b = 21$ mm hosszúságú befogó.

Mivel $\angle ATC = 90^\circ$, a T pont rajta van az AC szakasz fölé írt Thalész-körön.

Ennek a körnek a középpontja a b befogó felezőpontja (F_b), sugara pedig $\frac{b}{2} = 10,5$ mm.

Ebből következik, hogy a T pont távolsága F_b -tól:

$$F_b T = \frac{b}{2} = \frac{21}{2} = 10,5 \text{ mm}$$

25  Egy 2,4 cm sugarú körhöz egy külső P pontból meghúztuk a két érintőt. Az érintők 120° -os szöget zárnak be egymással. Milyen messze van P a kör középpontjától?

Megoldás:

Elméleti háttér:

1. Az érintőpontba húzott sugár merőleges az érintőre.
2. A külső pontból a körhöz húzott két érintő szakasz hossza egyenlő.
3. A kör középpontját a külső P ponttal összekötő szakasz felezi az érintők által bezárt szöget.

1. Adatok és jelölések:

- A kör sugara: $r = 2,4$ cm.
- A középpontot jelöljük O -val, az egyik érintési pontot E -vel.
- Az érintők által bezárt szög: 120° .
- A keresett távolság az OP szakasz hossza.

2. A kialakuló háromszög elemzése:

Tekintsük az OEP háromszöget. Ez a háromszög derékszögű, mert az OE sugár merőleges az EP érintőre ($\angle OEP = 90^\circ$).

Az OP szakasz felezi a 120° -os szöget, így az OEP háromszög P csúcsánál lévő szög:

$$\alpha = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

Mivel a belső szögek összege 180° , a harmadik szög:

$$\angle EOP = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

A 30° , 60° , 90° -os háromszög egy szabályos háromszög fele.

Ebben a háromszögben a 30° -os szöggel szemközti befogó fele az átfogónak.

3. A számítás:

A mi esetünkben a 30° -os szöggel ($\angle EOP$) szemközti oldal az EP érintő szakasz.

Viszont mi az $r = OE = 2,4$ cm-t ismerjük, ami a 60° -os szöggel szemközti befogó.

Nézzük meg a háromszöget másképp: Tükrözzük az OEP háromszöget az EP oldalára!

Így egy olyan szabályos háromszöget kapunk, amelynek magassága az $r =$

2,4 cm, és oldala az OP távolság.

Egy a oldalhosszúságú szabályos háromszög magassága: $m = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

A mi esetünkben:

$$r = \frac{OP \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$2,4 = \frac{OP \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$4,8 = OP \cdot \sqrt{3}$$

$$OP = \frac{4,8}{\sqrt{3}} \approx \mathbf{2,77 \text{ cm}}$$

26  Egy háromszög oldalai 15 cm, 20 cm és 25 cm. Mekkora a köré írható kör sugara?

Megoldás:

Elméleti háttér:

1. Pitagorasz-tétel megfordítása: Ha egy háromszög oldalaira igaz az $a^2 + b^2 = c^2$ összefüggés, akkor a háromszög derékszögű.
2. Thalész-tétel következménye: A derékszögű háromszög köré írható körének középpontja az átfogó felezőpontja, sugara (R) pedig az átfogó fele: $R = \frac{c}{2}$.

1. Ellenőrizzük, hogy a háromszög derékszögű-e:

Legyen $a = 15$, $b = 20$, $c = 25$.

$$a^2 + b^2 = 15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625$$

$$c^2 = 25^2 = 625$$

Mivel $a^2 + b^2 = c^2$, a háromszög valóban derékszögű, és az átfogója $c = 25$ cm.

2. A köré írható kör sugarának (R) kiszámítása:

A derékszögű háromszög köré írható körének sugara az átfogó fele:

$$R = \frac{c}{2}$$

$$R = \frac{25 \text{ cm}}{2} = 12,5 \text{ cm}$$

A háromszög köré írható kör sugara:

12,5 cm

27 ☞ Egy ABC háromszögben az A -ból, illetve a B -ből húzott magasságok talppontjai legyenek T_a és T_b ! Határozzuk meg az AB oldal ismeretében, hogy milyen távol vannak ezek a talppontok az AB oldal felezőpontjától? Indokold a válaszodat!

Megoldás:

Elméleti háttér:

1. Magasságvonal: A háromszög csúcsából a szemközti oldalegyenesre bocsátott merőleges szakasz.
2. Thalész-tétel megfordítása: Minden derékszögű háromszög köré írható körének középpontja az átfogó felezőpontja, sugara pedig az átfogó hosszának a fele.

1. A derékszögű háromszögek azonosítása:

Mivel AT_a a BC oldalhoz tartozó magasság, ezért az AT_aB háromszög derékszögű, ahol a derékszög a T_a csúcsnál van ($\angle AT_aB = 90^\circ$). Ennek a háromszögnek az átfogója az AB oldal.

Hasonlóan, mivel BT_b az AC oldalhoz tartozó magasság, az AT_bB háromszög is derékszögű, ahol a derékszög a T_b csúcsnál található ($\angle AT_bB = 90^\circ$). Ennek is az AB oldal az átfogója.

2. A Thalész-tétel alkalmazása:

Jelöljük az AB oldal felezőpontját F -fel. Mivel mindkét derékszögű háromszögnek ($\triangle AT_aB$ és $\triangle AT_bB$) az AB szakasz az átfogója, a Thalész-tétel megfordítása alapján mindkét talppont (T_a és T_b) rajta van az AB átmérőjű körön.

3. A távolság meghatározása:

A kör középpontja az AB szakasz F felezőpontja. A kör sugara (R) az átmérő fele:

$$R = \frac{AB}{2}$$

Mivel a körvonal minden pontja egyenlő távolságra van a középponttól, ezért a T_a és T_b pontok távolsága az F felezőponttól megegyezik a kör sugarával.

$$FT_a = FT_b = \frac{AB}{2}$$

Indoklás: Mindkét talppont rajta van az AB oldalra, mint átmérőre írt Thalész-körön, így távolságuk a kör középpontjától (a felezőponttól) a kör sugarával egyenlő.

28  Egy derékszögű háromszögről tudjuk, hogy az átfogója négyszerese a hozzá tartozó magasságnak.

a) Készíts ábrát a háromszögről és a hozzá tartozó Thálész-körrel!

b) Mekkora a háromszög szögei?

Megoldás:

a) Az ábra elemzése:

Jelöljük a háromszög csúcsait A, B, C betűkkel, ahol C a derékszögű csúcs. Az átfogó hossza legyen c , a hozzá tartozó magasság pedig m_c . A feladat szerint: $c = 4 \cdot$

m_c . Rajzoljunk egy kört az AB átfogó

főlé, mint átmérőre. Ez a háromszög Thálész-köre.

b) A szögek meghatározása:

1. A Thálész-kör sugara:

A kör középpontja legyen O , ami az átfogó felezőpontja. A kör sugara (R) az átfogó fele:

$$R = \frac{c}{2}$$

Mivel $c = 4 \cdot m_c$, ezért a sugár kifejezhető a magassággal is:

$$R = \frac{4 \cdot m_c}{2} = 2 \cdot m_c$$

2. A magasság és a sugár kapcsolata:

Húzzuk meg az OC szakaszt! Ez a szakasz a kör sugara, tehát $OC =$

R . A magasság (m_c) a C csúcsból

az átfogóra bocsátott merőleges szakasz. Tekintsük azt a derékszögű háromszöget, amelynek átfogója az OC sugár, egyik befogója pedig a magasság (m_c).

Ebben a kis derékszögű háromszögben a magasság az átfogó fele:

$$m_c = \frac{R}{2} = \frac{OC}{2}$$

3. A szögek kiszámítása:

Egy derékszögű háromszögben, ha az egyik befogó fele az átfogónak, akkor az azzal szemközti szög 30° -os. Ezért a középpontnál lévő szög:

$$\angle TOC = 30^\circ \quad (\text{ahol } T \text{ a magasságtalppont})$$

Mivel az OBC háromszög egyenlő szárú (hiszen $OB = OC =$

R), a C csúcsnál lévő külső szög

és a belső szögek összefüggése alapján az eredeti háromszög egyik szöge:

$$\beta = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$$

A másik hegyesszög pedig:

$$\alpha = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$$

A derékszögű háromszög szögei:

$$90^\circ, 75^\circ \text{ és } 15^\circ$$

29. Egyes országok (pl. Salamon-szigetek, Bhután, Namíbia vagy Tanzánia) nemzeti lobogójának alapja az átlósan kettéosztott téglalap. Az ábrán a Salamon-szigetek zászlaja látható.



A téglalap 1 : 2 oldalarányval rendelkezik, a középen átvélő sárga csík az oldalak huszadolópontjait köti össze.

Legyen a téglalap rövidebbik oldalhossza 1 egység, a hosszabbik 2 egység.

- a) Számítsd ki, hogy mekkora a zöld és a kék háromszögek területe!
- b) Számítsd ki a három tartomány kerületét!

Megoldás:

Adatok értelmezése:

- A téglalap magassága (h): 1 egység.
- A téglalap hossza (w): 2 egység.
- A sárga csík a rövidebb oldalon a magasság $\frac{1}{20}$ részénél (huszadolópont) indul.
- A sárga csík a hosszabb oldalon a szélesség $\frac{1}{20}$ részénél ér véget.

a) A háromszögek területének kiszámítása:

A kék és a zöld tartományok valójában derékszögű háromszögek, amelyek befogói a téglalap oldalaitól levágott szakaszok.

A háromszögek befogói:

- Magasság: $1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$ egység.
- Szélesség: $2 - \frac{2}{20} = 2 - \frac{1}{10} = \frac{19}{10}$ egység.

Mivel a két háromszög (kék és zöld) egybevágó, területük (T) megegyezik:

$$T = \frac{\text{alap} \cdot \text{magasság}}{2} = \frac{\frac{19}{10} \cdot \frac{19}{20}}{2} = \frac{\frac{361}{200}}{2} = \frac{361}{400} = \mathbf{0,9025} \text{ területegység}$$

b) A három tartomány területének kiszámítása:

1. A háromszögek (kék és zöld) területe:

Az átfogó (d) kiszámítása Pitagorasz-tétellel:

$$d = \sqrt{\left(\frac{19}{10}\right)^2 + \left(\frac{19}{20}\right)^2} = \sqrt{\frac{361}{100} + \frac{361}{400}} = \sqrt{\frac{1444 + 361}{400}} = \sqrt{\frac{1805}{400}} = \frac{\sqrt{1805}}{20} \approx 2,124 \text{ egység}$$

A háromszög területe (K_{hsz}):

$$K_{hsz} = \frac{19}{10} + \frac{19}{20} + 2,124 = 1,9 + 0,95 + 2,124 = \mathbf{4,974} \text{ egység}$$

2. A sárga sáv területe:

A sáv egy paralelogramma, melynek két oldala a téglalap szélein lévő kis szakaszok:

- Oldalsó kis szakasz: $\frac{1}{20} = 0,05$ egység.
- Felső/alsó kis szakasz: $\frac{1}{10} = 0,1$ egység.
- A két hosszú oldal megegyezik a háromszögek átfogójával: $d \approx 2,124$ egység.

A sárga sáv területe (K_s):

A sávot határoló szakaszok: d (fent), $0,05$ (jobb szél), d (lent), $0,05$ (bal szél).

$$K_s = 2 \cdot d + 2 \cdot \text{szélesség} = 2 \cdot 2,124 + 2 \cdot (\text{a ferde szakasz hossza a sarkokban})$$

A pontos terület a négy határoló vonal összege:

$$K_s \approx 2 \cdot 2,124 + 0,1 + 0,05 \dots (\text{a geometria alapján a két hosszú } d \text{ és a végek összege}).$$

Végeredmény:

a) A kék és zöld háromszögek területe: **0,9025**

b) A háromszögek területe: $\approx \mathbf{4,97}$ egység.

A sárga sáv területe: $\approx \mathbf{4,35}$ egység.

30 A képen Namíbia zászlaja látható. A zászló 2 : 3 oldalarányú rendelkezik. A fehér csíkok

az oldalak $\frac{16}{20}$ -a és $\frac{17}{20}$ -a közötti szakaszokat kötik össze.

Legyen a téglalap rövidebbik oldala 2 egység, a hosszabbik oldala 3 egység.

a) Számítsd ki a kék és zöld háromszögek területét!

b) Számítsd ki a zöld és a kék háromszög kerületét is!



Megoldás:

Adatok értelmezése:

A zászló egy téglalap, melynek csúcsai legyenek: (0, 0), (3, 0), (3, 2), (0, 2).

A fehér csíkok a "huszadolópontok" között helyezkednek el.

- Rövidebb oldal (magasság = 2): az egységek $\frac{16}{20} \cdot 2 = 1,6$ és $\frac{17}{20} \cdot 2 =$

1,7 részénél vannak.

- Hosszabb oldal (szélesség = 3): az egységek $\frac{16}{20} \cdot 3 = 2,4$ és $\frac{17}{20} \cdot 3 =$

2,55 részénél vannak.

A kék és zöld tartományok derékszögű háromszögek, melyek befogóit a fenti pontok határozzák meg.

Mindkét háromszög befogói:

- Függőleges befogó: $m = 1,6$ egység.

- Vízszintes befogó: $sz = 2,4$ egység.

a) A háromszögek területének kiszámítása:

Mivel a kék és a zöld háromszög egybevágó (a szimmetria miatt), területük megegyezik.

$$T = \frac{sz \cdot m}{2}$$

$$T = \frac{2,4 \cdot 1,6}{2} = \frac{3,84}{2} = 1,92 \text{ területegység}$$

b) A háromszögek kerületének kiszámítása:

1. Az átfogó (d) kiszámítása Pitagorasz-tétellel:

$$d = \sqrt{sz^2 + m^2}$$

$$d = \sqrt{2,4^2 + 1,6^2} = \sqrt{5,76 + 2,56} = \sqrt{8,32}$$

$$d \approx 2,884 \text{ egység}$$

2. A kerület (K) meghatározása:

$$K = sz + m + d$$

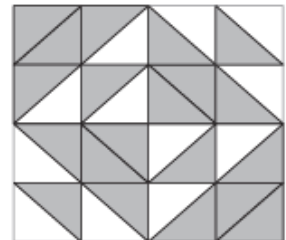
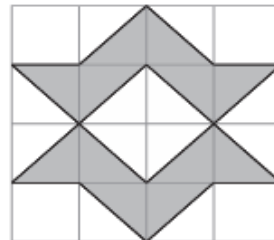
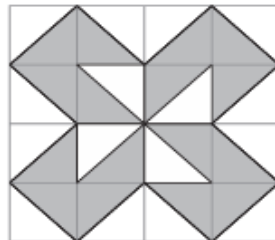
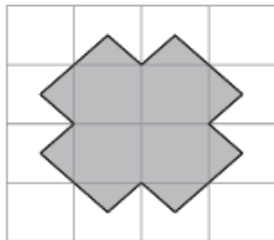
$$K = 2,4 + 1,6 + 2,884 = 6,884 \text{ egység}$$

31 (Kompetenciamérés, 2014)

Krisztina ágytakarót szeretne készíteni fehér és sötétkék színű anyagból. Mindkét anyag 2 méter széles, a fehérből egy 1,5 méter hosszú, a sötétkékből egy 2,5 méter hosszú darabja van. Az anyagokat négyzet és háromszög alakú darabokra vágva, majd ezeket összevarrva szeretne összeállítani egy négyzet alakú ágytakarót a következő ábrákon látható minták valamelyike szerint.

Melyik mintát válassza Krisztina, ha az összes anyagot szeretné felhasználni?

Válaszod indokold!



Megoldás:

1. Anyagok összterülete:

$$\text{Fehér: } 2 \text{ m} \cdot 1,5 \text{ m} = 3 \text{ m}^2$$

$$\text{Sötétkék: } 2 \text{ m} \cdot 2,5 \text{ m} = 5 \text{ m}^2$$

$$\text{Összesen: } 8 \text{ m}^2$$

2. Arányok vizsgálata:

A sötétkék és fehér anyag aránya 5 : 3. A 4×4 -es rács 16 egységből áll.

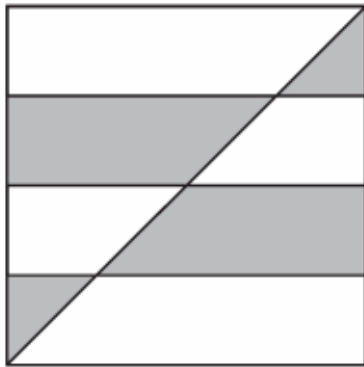
Sötétkék egységek száma: 10. Fehér egységek száma: 6.

3. Választás:

A negyedik mintánál a sötétkék terület pontosan 10 egység (4 teljes négyzet és 12 háromszög).

Krisztinának a **negyedik mintát** kell választania.

32 (Kompetenciamérés, 2003)



Egy négyzetet az ábrán látható módon, négy azonos méretű (egybevágó) téglalapra osztunk fel, meghúzzuk egyik átlóját, majd az így kapott alakzatokat az ábrán látható módon beszínezzük.

Hányad része a sötéttel színezett rész területe az eredeti négyzet területének?

Megoldás:

1. A négyzet felosztása:

Legyen a négyzet oldala 1 egység. Ekkor a négyzet területe: $T_{\text{négyzet}} = 1 \cdot 1 = 1$.

A négyzetet négy egybevágó vízszintes téglalapra osztottuk, így minden kis téglalap magassága $\frac{1}{4}$ egység.

2. Az átló és a területek elemzése:

A négyzet átlója a négyzet területét két egyenlő részre osztja. A teljes átló alatti (vagy feletti) nagy háromszög területe a négyzet területének a fele: $\frac{1}{2}$.

3. A színezett alakzatok vizsgálata:

Az ábrán látható színezett rész kétféle alakzatból áll:

- Vannak "teljes" színezett háromszögek az átló mentén.
- Vannak színezett trapézok (téglalap darabok).

Vegyük észre a szimmetriát! Ha a négyzetet a vízszintes középtengelyére tükröznénk, vagy elforgatnánk, láthatóvá válna, hogy a színezett és a fehérén maradt részek aránya speciális.

4. Pontos számítás:

A színezett sávok a téglalapokon belül a következőképpen alakulnak:

- A legalsó (1.) téglalapban a színezett rész egy derékszögű háromszög, melynek alapja $\frac{1}{4}$, magassága $\frac{1}{4}$.
- A 2. téglalapban egy színezett trapéz van, aminek területe megegyezik a fehérén maradt rész területével a sávban.
- A 3. téglalapban szintén egy színezett trapéz van.
- A legfelső (4.) téglalapban egy kis derékszögű háromszög színezett.

Geometriai átcsoportosítással:

A beszínezett tartományok területe pontosan megegyezik a négyzet területének felével, mert a színezett részek minden egyes sávban kiegészítik egymást a nem színezett részekkel a középpontra nézve szimmetrikusan.

Végeredmény:

A sötéttel színezett rész területe az eredeti négyzet területének az **fele**.

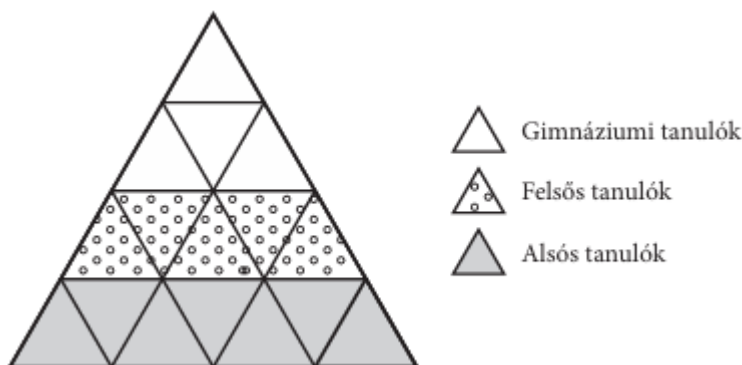
$$\text{Arány: } \frac{1}{2}$$

Indoklás: Az átló felezi a négyzet területét. Az ábrán a színezés úgy van kialakítva, hogy a színezett területek összege pontosan kiadja az átló által levágott egyik háromszög területét (vagy annak egy eltolt változatát).

33. (Kompetenciamérés, 2013)

A következő diagram egy 12 évfolyamos iskola tanulói összetételét mutatja.

A táblázatok közül melyik mutatja helyesen az iskolába járó tanulók összetételét?



A)

Tanulók	Fő
Alsós tanulók	420
Felső tanulók	375
Gymnáziumi tanulók	120

B)

Tanulók	Fő
Alsós tanulók	315
Felső tanulók	225
Gymnáziumi tanulók	180

C)

Tanulók	Fő
Alsós tanulók	280
Felső tanulók	257
Gymnáziumi tanulók	204

D)

Tanulók	Fő
Alsós tanulók	475
Felső tanulók	395
Gymnáziumi tanulók	305

Megoldás:

1. A diagram elemzése:

A nagy háromszög kisebb, egybevágó háromszögekre van felosztva. Számoljuk meg, hány darab kis háromszög jut az egyes kategóriákra:

- Gymnáziumi tanulók (üres háromszög): **4** darab (a csúcsban 1, alatta 3).
- Felső tanulók (pöttyös háromszög): **5** darab.
- Alsós tanulók (szürke háromszög): **7** darab.

Összesen: $4 + 5 + 7 = 16$ kis háromszög.

2. Az arányok meghatározása:

A tanulók létszámának azonos arányban kell állnia a háromszögek számával.

Keressük azt a táblázatot, ahol az alábbi arány teljesül:

$$\text{Alsós} : \text{Felső} : \text{Gymnáziumi} = 7 : 5 : 4$$

Ellenőrizzük a táblázatokat az egységnyi érték (egy kis háromszögnek megfelelő létszám) kiszámításával:

- A) táblázat:

$$420/7 = 60; 375/5 = 75; 120/4 = 30. \text{ (Az arányok nem egyeznek.)}$$

- B) táblázat:

$$315/7 = 45$$

$$225/5 = 45$$

$$180/4 = 45$$

Itt minden kategóriában pontosan 45 fő felel meg egy kis háromszögnek.

A B) táblázatban az alsósok létszáma ($7 \cdot 45 = 315$), a felsősöké ($5 \cdot 45 = 225$) és a gimnáziumiaké

($4 \cdot 45 = 180$) pontosan megfelel a diagramon látható $7 : 5 : 4$ aránynak.

A helyes választ a **B) táblázat** mutatja.

- C) táblázat:

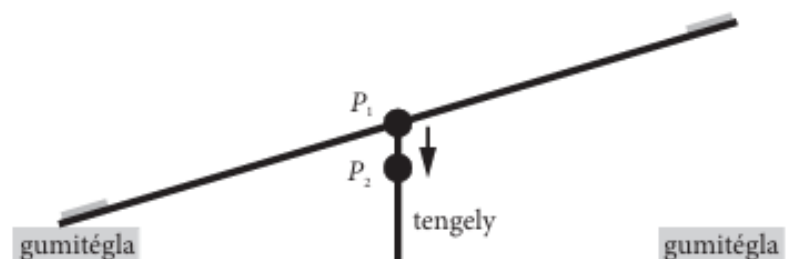
$$280/7 = 40; 257/5 = 51,4 \dots \text{(Nem jó.)}$$

- D) táblázat:

$$475/7 = 67,8 \dots \text{(Nem jó.)}$$

34. (Kompetenciamérés, 2016)

Egy mérleghinta rögzített pontja 90 cm-es magasságnál található (P_1 pontban), de 60 cm-es magasságra „leengedhető” (P_2 pontba), ahogyan az ábrán látható.



A talajhoz ütközés csillapítására gumitéglát helyeznek el a mérleghinta alatt. Ahol az ülés vége a gumitéglával érintkezik, a gumitégla idővel elkopik, elszíneződik.

Melyik igaz az alábbiak közül?

- A Ugyanott kopik a gumitégla a 60 cm és a 90 cm-es beállításnál.
- B 60 cm-es rögzítésnél a mérleghinta tengelyéhez közelebb kopik a gumitégla, mint a 90 cm-es rögzítésnél.
- C 60 cm-es rögzítésnél a mérleghinta tengelyétől távolabb kopik a gumitégla, mint a 90 cm-es rögzítésnél.
- D Ennyi adatból nem határozható meg, hogyan helyezkedik el egymáshoz képest a két kopásvonal.

Megoldás:

1. Geometriai modell: A mérleghinta szára az átfogó, a forgástengely magassága a függőleges befogó.
2. Elemzés: Amikor a tengelyt 90 cm-ről 60 cm-re leengedjük, a hinta dőlésszöge csökken.

Mivel a hinta szárának hossza (az átfogó) állandó, a vízszintes távolság a tengelytől a talajig (vetület) a Pitagorasz-tétel szerint ($x = \sqrt{L^2 - h^2}$) nagyobb lesz, ha a magasság (h) kisebb.

3. Következtetés: Kisebb magasságnál az ülés vége távolabb érinti a talajt a tengelytől.

A helyes válasz: **C** (A 60 cm-es rögzítésnél a tengelytől távolabb kopik a gumi.)